



**Národní informační středisko
pro podporu kvality**

Statistická regulace procesu při krátkých výrobních sériích

Obsah

- Vlastnosti klasického regulačního diagramu
- Regulační diagramy založené na seskupování sérií
- Speciální diagramy pro samotné krátké série
- Diagramy pro regulaci srovnáváním

Vlastnosti Shewhartova regulačního diagramu

Předpoklad

normální rozdělení regulované veličiny $N(\mu, \sigma^2)$, μ a σ^2 konstantní, hodnoty regulované veličiny nezávislé

diagram pro průměr
regulační meze

$$UCL = \mu_0 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \cdot \quad LCL = \mu_0 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

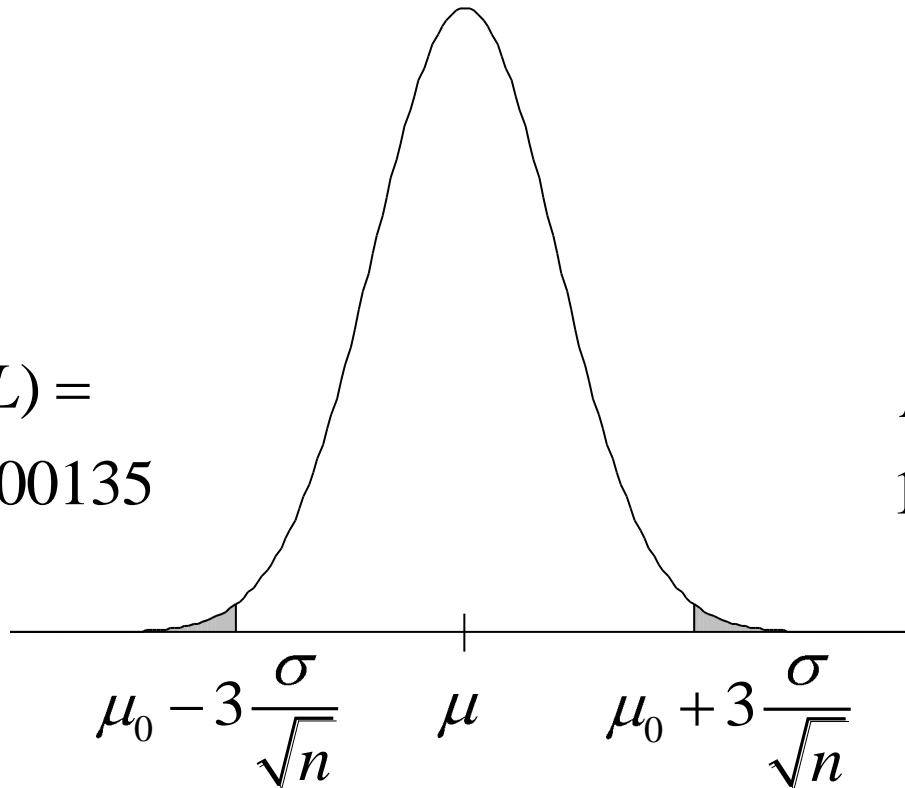
n ... rozsah podskupin ($n = 1, 2, \dots$)

signál – překročení některé z regulačních mezí

Riziko falešného signálu

$$P(X \leq LCL) = \Phi(-3) = 0,00135$$

$$P(X > UCL) = 1 - \Phi(3) = 0,00135$$



Proces pod kontrolou – μ a σ nezměněny ($\mu = \mu_0$)
pravděpodobnost falešného signálu

$$p = 2 \cdot 0,00135 = 0,0027$$

Průměrná délka přeběhu ARL proces pod kontrolou

průměrný počet výběrů do objevení se signálu

počet výběrů (počet pokusů) – geometrické rozdělení s
parametrem p (pravděpodobnost signálu v každém
pokusu)

střední hodnota geometrického rozdělení $1/p$

| skutečná střední hodnota procesu | p | ARL |
|-------------------------------------|--------|-------|
| μ_0 | 0,0027 | 370 |

k falešnému signálu dojde v průměru jednou za 370 výběrů₆

Průměrná délka přeběhu ARL

posun střední hodnoty

| skutečná střední hodnota procesu | p | ARL |
|------------------------------------|--------|-------|
| μ_0 | 0,0027 | 370 |
| $\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | 0,0228 | 44 |
| $\mu_0 + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | 0,1587 | 6 |

| posun střední hodnoty (v násobcích σ) | n | | | | | | | | | |
|--|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0,5 | 155 | 91 | 61 | 44 | 33 | 26 | 21 | 18 | 15 | 13 |
| 1 | 44 | 18 | 10 | 6 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 1,5 | 15 | 5 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 6 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Regulační diagramy pro detekci menších posunů střední hodnoty

Cíl – snížit ARL při malém posunu střední hodnoty

- Doplnění klasických regulačních diagramů

zóny A,B,C

testy zvláštních seskupení bodů

nevýhoda – zvyšuje se riziko falešného signálu

(zkrácení ARL u procesu pod kontrolou)

- CUSUM diagramy

- EWMA diagramy

CUSUM a EWMA zvláště výhodné pro individuální měření

nevýhoda – méně citlivé na velké posuny

ARL u CUSUM

| posun střední hodnoty (v násobcích σ) | $h = 4$ | $h = 5$ |
|--|---------|---------|
| 0 | 168 | 465 |
| 0,25 | 74,2 | 139 |
| 0,5 | 26,6 | 38 |
| 0,75 | 13,3 | 17 |
| 1 | 8,38 | 10,4 |
| 1,5 | 4,75 | 5,75 |
| 2 | 3,34 | 4,01 |
| 2,5 | 2,62 | 3,11 |
| 3 | 2,19 | 2,57 |
| 4 | 1,71 | 2,01 |

h – parametr CUSUM diagramu

Vlastnosti diagramů při odhadovaných parametrech procesu

Kvalita odhadu má vliv na riziko falešného signálu a *ARL*.

Vlastnosti regulačních diagramů navržených pro detekci malých posunů jsou citlivé na odhady parametrů procesu.

ARL je větší než v případě známých parametrů.

ARL nelze určit analyticky. Pomocí simulací bylo zjištěno, že pokud je odhad směrodatné odchylky založen alespoň na 100 pozorováních, jsou vlastnosti diagramu podobné případu se známými parametry.

Volba typu diagramu

I. etapa SPC

cíl – stabilizace procesu, odhad parametrů pro II. etapu
riziko falešného signálu nebo ARL nejsou tak podstatné, hlavní je detekce větších vymezitelných příčin

Shewhartovy diagramy případně doplněné o testy seskupení
uvádí se nutnost alespoň 20 až 25 podskupin

II. etapa SPC

proces pod kontrolou

předpokládá se, že hlavní vymezitelné příčiny variability byly odstraněny, je třeba reagovat na menší odchylky

doporučuje se CUSUM nebo EWMA

Krátké série bez rozlišování dvou etap

speciální postupy

- seskupování sérií, volba společného sledovaného znaku
- samostatné krátké série

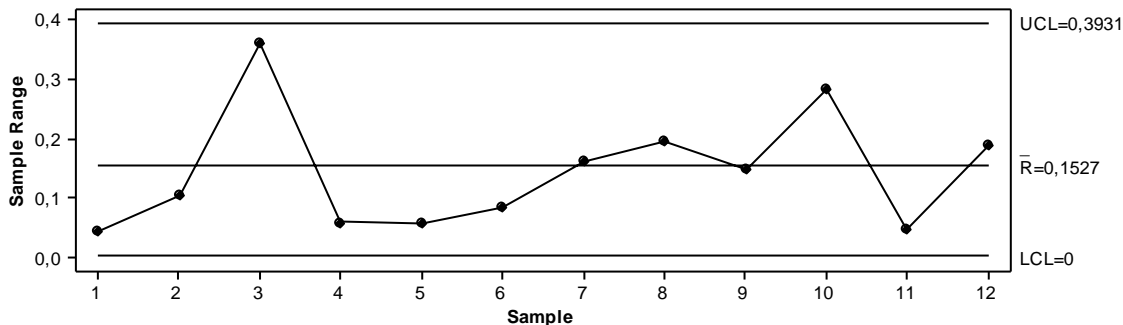
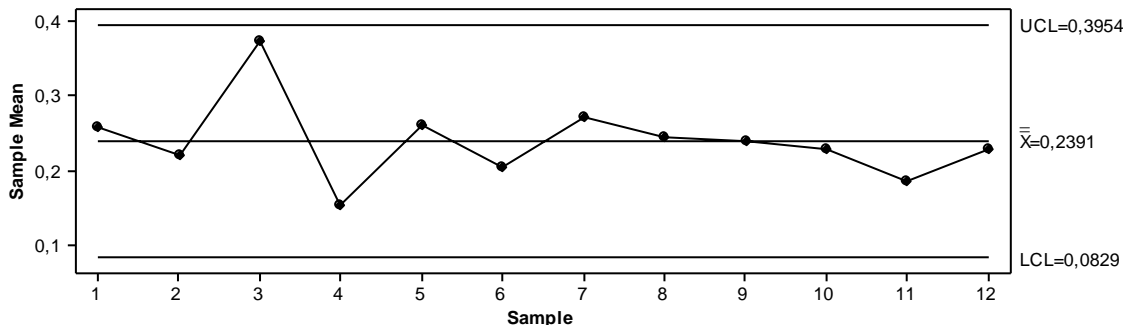
Série jako součást jediného procesu

- regulační diagramy DNOM
předpoklad – stejná variabilita ve všech sériích,
jmenovité hodnoty se liší
klasické regulační diagramy aplikované na odchylky od
jmenovité hodnoty
- standardizované regulační diagramy
rozdílné jmenovité hodnoty i variabilita v sériích
klasické regulační diagramy aplikované na
standardizovanou regulovanou veličinu – regulační
meze odpovídají $\mu = 0$ a $\sigma = 1$

DNOM

Předpoklad $X_m \sqcup N(\mu_m, \sigma^2)$ v m-té sérii, cílová hodnota T_m ,
na veličinu $Y_m = X_m - T_m$ se aplikuje běžný postup.

| Série | T | X1 | X2 | X3 | Y1 | Y2 | Y3 | \bar{Y} | R |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|-------|
| a | 3,25 | 3,493 | 3,496 | 3,533 | 0,243 | 0,246 | 0,283 | 0,257 | 0,040 |
| a | 3,25 | 3,450 | 3,431 | 3,533 | 0,200 | 0,181 | 0,283 | 0,221 | 0,102 |
| b | 5,50 | | | | | | | 0,373 | 0,360 |
| b | 5,50 | | | | | | | 0,154 | 0,056 |
| b | 5,50 | | | | | | | 0,261 | 0,055 |
| b | 5,50 | | | | | | | 0,204 | 0,082 |
| c | 7,75 | | | | | | | 0,271 | 0,159 |
| c | 7,75 | | | | | | | 0,245 | 0,192 |
| c | 7,75 | | | | | | | 0,240 | 0,147 |
| c | 7,75 | | | | | | | 0,229 | 0,282 |
| c | 7,75 | | | | | | | 0,185 | 0,044 |
| c | 7,75 | | | | | | | 0,230 | 0,186 |



Standardizovaný diagram data v podskupinách

Příklad (Montgomery 2009)

Předpoklad $X_m \sqcup N(\mu_m, \sigma_m^2)$

parametry

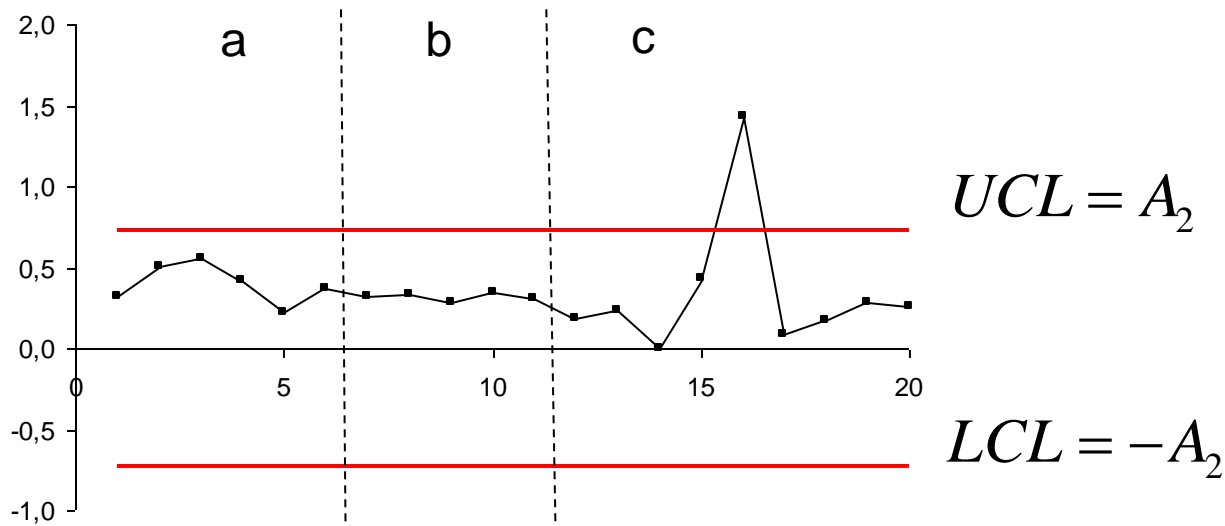
- dány
- odhadnuty na základě dat ze sérií stejného typu

Pozn.: Ke kvalitnímu odhadu je třeba dostatečný počet měření v každé sérii, v ukázce je pro přehlednost menší počet podskupin.

| Série | T | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ | |
|-------|------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------|
| a | 100 | 120 | 95 | 100 | 110 | } \bar{x}_1, \bar{R}_1 |
| a | 100 | 115 | 123 | 99 | 102 | |
| a | 100 | 116 | 105 | 114 | 108 | |
| a | 100 | 120 | 116 | 100 | 96 | |
| a | 100 | 112 | 100 | 98 | 107 | |
| a | 100 | 98 | 110 | 116 | 105 | |
| b | 200 | 230 | 210 | 190 | 216 | } \bar{x}_2, \bar{R}_2 |
| b | 200 | 225 | 198 | 236 | 190 | |
| b | 200 | 218 | 230 | 199 | 195 | |
| b | 200 | 210 | 225 | 200 | 215 | |
| b | 200 | 190 | 218 | 212 | 225 | |
| c | 2000 | 2150 | 2230 | 1900 | 1925 | } \bar{x}_3, \bar{R}_3 |
| c | 2000 | 2200 | 2116 | 2000 | 1950 | |
| c | 2000 | 1900 | 2000 | 2115 | 1990 | |
| c | 2000 | 1968 | 2250 | 2160 | 2100 | |
| c | 2000 | 2500 | 2225 | 2475 | 2390 | |
| c | 2000 | 2000 | 1900 | 2230 | 1960 | |
| c | 2000 | 1960 | 1980 | 2100 | 2150 | |
| c | 2000 | 2320 | 2150 | 1900 | 1940 | |
| c | 2000 | 2162 | 1950 | 2050 | 2125 | |

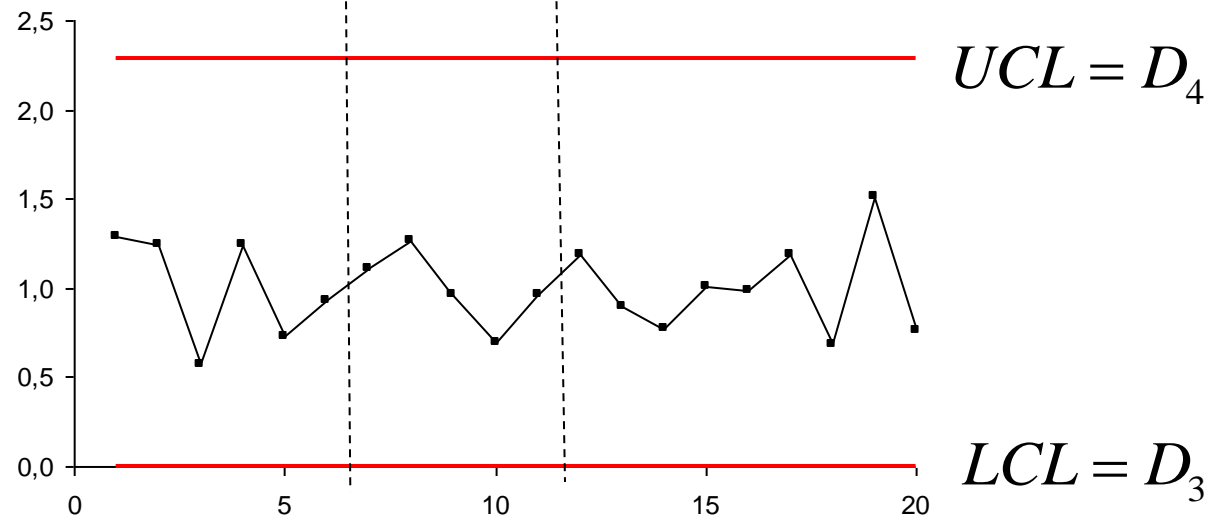
pro průměr

$$\bar{x}_{i(m)}^s = \frac{\bar{x}_{i(m)} - T_m}{\bar{R}_m}$$



pro rozpětí

$$R_{i(m)}^s = \frac{R_{i(m)}}{\bar{R}_m}$$



i-tý výběr v rámci
m-té série

A_2, D_3, D_4 součinitele pro rozsah podskupin $n = 4$ (ČSN ISO 8258)

Standardizovaný diagram Z - MR

individuální hodnoty

Příklad (Breyfogle 2003)

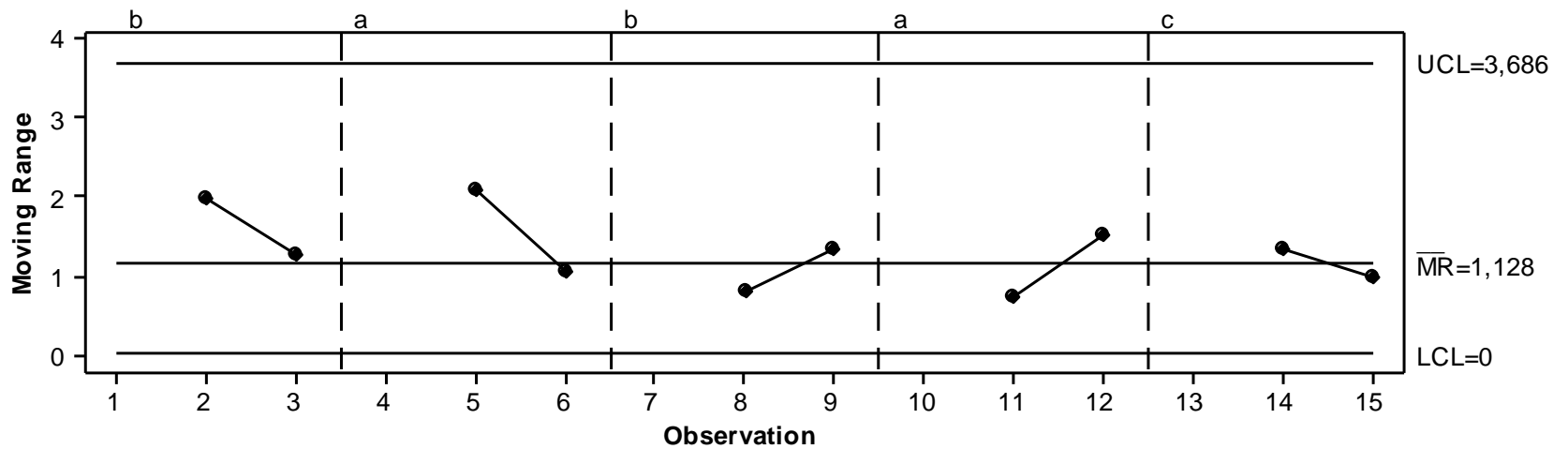
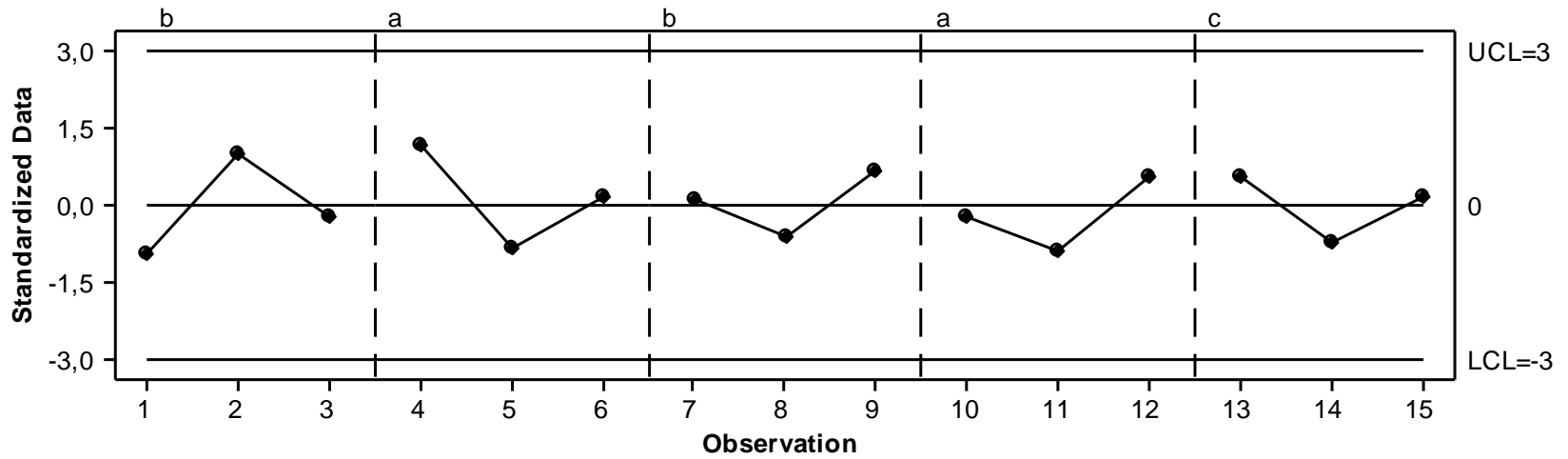
$$Z_m = (X_m - \hat{\mu}_m) / \hat{\sigma}_m$$

$$z_{i(m)} = (x_{i(m)} - \bar{x}_m) / \hat{\sigma}_m$$

odhad $\hat{\sigma}_m$ pomocí klouzavých rozpětí na základě hodnot ze stejné série

$$MR_i = |z_i - z_{i-1}|$$

| Série | X | Průměr | Sigma | Z | MR |
|-------|-------|--------|-------|--------|-------|
| b | 1,435 | 1,502 | 0,070 | -0,954 | * |
| b | 1,572 | 1,502 | 0,070 | 1,012 | 1,966 |
| b | 1,486 | 1,502 | 0,070 | -0,222 | 1,234 |
| a | 1,883 | 1,785 | 0,082 | 1,203 | * |
| a | 1,715 | 1,785 | 0,082 | -0,852 | 2,055 |
| a | 1,799 | 1,785 | 0,082 | 0,175 | 1,028 |
| b | 1,511 | 1,502 | 0,070 | 0,136 | * |
| b | 1,457 | 1,502 | 0,070 | -0,639 | 0,775 |
| b | 1,548 | 1,502 | 0,070 | 0,667 | 1,306 |
| a | 1,768 | 1,785 | 0,082 | -0,204 | * |
| a | 1,711 | 1,785 | 0,082 | -0,901 | 0,697 |
| a | 1,832 | 1,785 | 0,082 | 0,579 | 1,480 |
| c | 1,427 | 1,392 | 0,063 | 0,557 | * |
| c | 1,344 | 1,392 | 0,063 | -0,752 | 1,309 |
| c | 1,404 | 1,392 | 0,063 | 0,195 | 0,947 |



regulační meze: Z-diagram ± 3 , MR-diagram 0 a 3,686

Samostatná krátká série

- úprava regulačních mezí (Yang, Hillier)
 - udržuje riziko falešného signálu na požadované úrovni α
 - nezáleží na počtu podskupin k
- Q-diagram (Quesenberry)
 - standardizace původní sledované veličiny X , v každém kroku se využívá informace ze všech předcházejících
 - předpoklad - známá střední hodnota
- samostartovací CUSUM
 - standardizace veličiny X stejně jako u Q-diagramu, není třeba zadávat cílovou hodnotu
- bayesovský (Wasserman 1993)
 - využití apriorní informace kromě informace na základě výběru
- využití Kalmanova filtru, modifikace EWMA diagramů (Del Castillo, Montgomery 1995), (Wasserman 1995)
 - lepší vlastnosti v případě, že změna úrovně procesu nastane brzy (během 25 pozorování)

Úprava regulačních mezí

(Yang a Hillier 1970)

cíl - dodržet zvolené riziko falešného signálu α

$$\bar{\bar{x}} \pm \sqrt{\frac{k+1}{kn}} t_{1-\alpha/2, k(n-1)} S_p \quad \text{pro retrospektivní analýzu}$$

$$\bar{\bar{x}} \pm \sqrt{\frac{k-1}{kn}} t_{1-\alpha/2, k(n-1)} S_p \quad \text{pro regulaci procesu}$$

$\bar{\bar{x}}$... celkový průměr, k ... počet výběrů, n .. rozsah výběrů

$$S_p^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad \text{... odhad rozptylu (inherentní variabilita)}$$

Q - diagram

předpoklad – známá střední hodnota, neznámý rozptyl
odhad směrodatné odchylky se neustále modifikuje
pro pořadí výběru t (Quesenberry 1991)

$$Q_t = \Phi^{-1} \left(F_{tn} \left(\frac{\bar{x}_t - \mu}{\hat{\sigma}_t / \sqrt{n}} \right) \right) \quad \text{pro } n > 1$$

$$Q_t = \Phi^{-1} \left(F_{t-1} \left(\frac{x_t - \mu}{\hat{\sigma}_t} \right) \right) \quad \text{pro } n = 1$$

F_{tn} distribuční funkce t- rozdělení s tn stupni volnosti

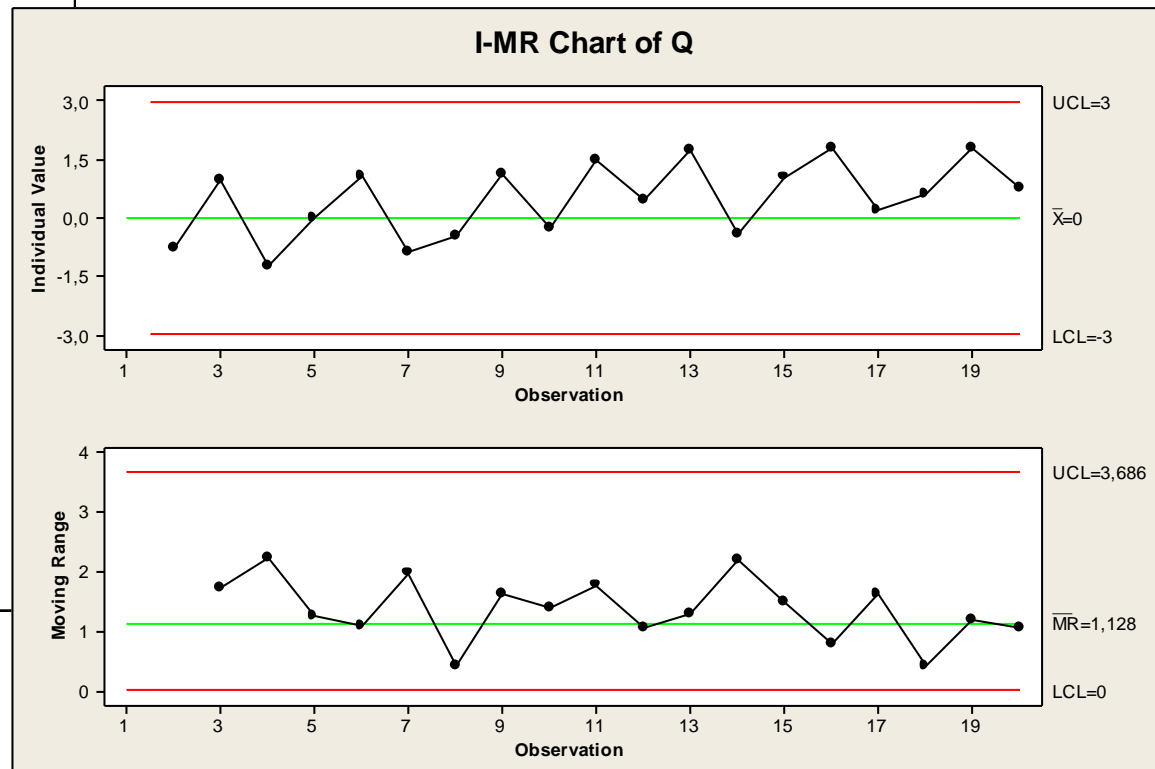
$$s_t^2 = \frac{1}{tn} \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2 \quad \text{pro } n > 1, \quad s_t^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (x_i - \mu)^2 \quad \text{pro } n = 1$$

Q – diagram

individuální hodnoty

Příklad (Montgomery 2009)

| i | X_i | i | X_i |
|----|-------|----|-------|
| 1 | 102 | 11 | 107 |
| 2 | 97 | 12 | 102 |
| 3 | 104 | 13 | 109 |
| 4 | 93 | 14 | 98 |
| 5 | 100 | 15 | 105 |
| 6 | 105 | 16 | 110 |
| 7 | 96 | 17 | 101 |
| 8 | 98 | 18 | 103 |
| 9 | 105 | 19 | 110 |
| 10 | 99 | 20 | 104 |



regulační meze

diagram pro $Q \pm 3$,

diagram pro klouzavá rozpětí 0 a 3,686

CUSUM

individuální hodnoty

Příklad (Montgomery 2009)

| i | X_i | i | X_i |
|----|-------|----|-------|
| 1 | 102 | 11 | 107 |
| 2 | 97 | 12 | 102 |
| 3 | 104 | 13 | 109 |
| 4 | 93 | 14 | 98 |
| 5 | 100 | 15 | 105 |
| 6 | 105 | 16 | 110 |
| 7 | 96 | 17 | 101 |
| 8 | 98 | 18 | 103 |
| 9 | 105 | 19 | 110 |
| 10 | 99 | 20 | 104 |

Data z procesu se střední hodnotou 100, v 11. podskupině posun na 105.

Cílová hodnota $\mu_0 = 100$.

Samostartovací CUSUM

v n-tém kroku ($n = 1, 2, \dots$) vypočteme z n hodnot výběrový průměr a výběrový rozptyl

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

rekurentní vztahy

pro průměr

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n}$$

pro rozptyl

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{w_n}{n-1}$$

$$w_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = w_{n-1} + \frac{(n-1)(x_n - \bar{x}_{n-1})^2}{n}$$

$$T_n = \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{s_{n-1}}$$

$$U_n = \Phi^{-1}[F_{n-2}(a_n T_n)]$$

$$a_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$U = \Phi^{-1}(p)$ - p-quantil rozdělení $N(0,1)$,

$F_{n-2}(a_n T_n)$ - distribuční funkce t-rozdělení s n-2 stupni volnosti

Tabelární CUSUM se aplikuje na normovanou veličinu U

parametry procesu $\mu_0 = 0, \sigma = 1$

$$C_i^+ = \max \left[0, u_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+ \right]$$

$$C_i^- = \max \left[0, (\mu_0 - K) - u_i + C_{i-1}^- \right]$$

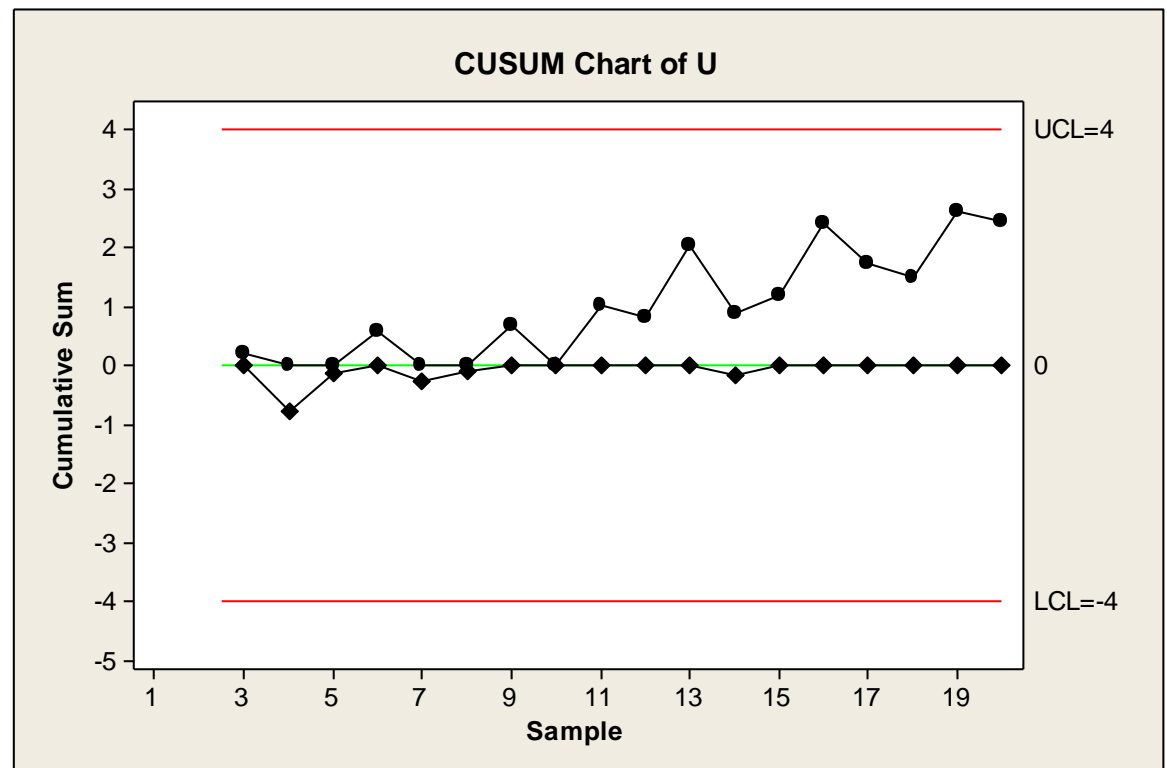
$H = h\sigma$ (mezní hodnota)

$K = k\sigma$ (referenční hodnota)

doporučené hodnoty

$h = 4$

$k = 0,5$



Regulace srovnáváním

standardizované diagramy np, p, c, u

$$Z_{i(m)} = \frac{n_m p_{i(m)} - n_m \bar{p}_m}{\sqrt{n_m \bar{p}_m (1 - \bar{p}_m)}}$$

$$Z_{i(m)} = \frac{p_{i(m)} - \bar{p}_m}{\sqrt{\frac{\bar{p}_m (1 - \bar{p}_m)}{n_m}}}$$

$$Z_{i(m)} = \frac{c_{i(m)} - \bar{c}_m}{\sqrt{\bar{c}_m}}$$

$$Z_{i(m)} = \frac{u_{i(m)} - \bar{u}_m}{\sqrt{\frac{\bar{u}_m}{n_m}}}$$

hodnota standardizované veličiny v i-tém výběru v rámci m-té série
 n_m značí rozsah výběrů v m-té sérii
regulační meze ± 3

Literatura

- BISSELL, D. 1994: Statistical Methods for SPC and TQM. Chapman & Hall, 1994.
- BREYFOGLE, F.W. 2003: Implementing Six Sigma: Smarter Solutions Using Statistical Methods. J. Wiley & Sons, 2003.
- DEL CASTILLO, E. – GRAYSON, J.M. – MONTGOMERY, D.C. – RUNGER, G.C. 1996: A review of statistical process control techniques for short run manufacturing systems. In: Communications in Statistics – Theory and Methods č. 11, 1996: s. 2723 – 2737.
- DEL CASTILLO, E., MONTGOMERY, D.C. (1994): Short-run statistical process control: Q-charts enhancements and alternative methods. Quality and Reliability Engineering International, 10, 87 – 97
- DEL CASTILLO, E., MONTGOMERY, D.C. (1995): A Kalman filtering process control scheme with an application in semiconductor short run manufacturing. Quality and Reliability Engineering International, 11, 101 – 105
- FARNUM, N.R. (1992): Control charts for short runs: Nonconstant process and measurement error. Journal of Quality Technology, 24(3), 138 – 144
- HILLIER, F.S. (1964): Chart control limits based on a small number of subgroups. Industrial Quality Control, 20(8), 24 – 29
- HILLIER, F.S. (1969): X and R chart control limits based on a small number of subgroups. Journal of Quality Technology, 1(1), 17 – 26

MAGUIRE, M., ed. 1999: Statistical gymnastics revisited: A debate on one approach to short-run control charts. In: Quality Progress č. 2, 1999: s. 84 – 94.

MONTGOMERY, D.C.: Statistical Quality Control. J. Wiley & Sons, 2009.

PYZDEK, T. (1993): Process control for short and small runs. Quality Progress, 26(4), 51 – 60

QUESENBERRY, C.P. (1991): SPC Q charts for start-up processes and short or long runs. Journal of Quality Technology, 23(3), 213 – 224

QUESENBERRY, CH. 1998: Statistical Gymnastics. In: Quality Progress č. 9, 1998: s. 77 – 79

RYAN, T.P. 2000: Statistical Methods for Quality Improvement. J. Wiley & Sons, 2000.

WASSERMAN, G.S. (1993): Short run SPC based upon the second order dynamic linear model for trend detection. Communications in Statistics: Simulation and Computation 22(4): 1011 - 1036

WASSERMAN, G.S. (1995): An adaptation of the EWMA chart for short run SPC. International Journal of Production Research 33(10): 2821 – 2833

YANG, C.H., HILLIER, F.S. (1970): Mean and variance chart control limits based on a small number of subgroups. Journal of Quality Technology, 2(1), 9 – 16